



TITLE:

プロジェクト企業における創業者
利益のための資本構造 (あいまいさ
と不確実性を含む状況の数理的意
思決定)

AUTHOR(S):

浦谷, 規; 岸本, 博則; 宇都宮, 誠

CITATION:

浦谷, 規 ...[et al]. プロジェクト企業における創業者利益のための資本構造 (あいまいさと不確実性を含む状況の数理的意思決定). 数理解析研究所講究録 2002, 1252: 233-239

ISSUE DATE:

2002-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41843>

RIGHT:

プロジェクト企業における創業者利益のための資本構造

法政大・工 浦谷 規 (Tadashi Uratani) 岸本 博則 (Hironori Kishimoto)

Graduate School of Engineering

Hosei University

東京三菱銀行 宇都宮 誠 (Makoto Utsunomiya)

Tokyo-Mitsubishi Bank

1 はじめに

プロジェクト・ファイナンスは新規に企業を興すために、グローバル経済下におけるもっとも効率的な資金調達の方法である。創業者は、一般的に起業に際して自己資金が少なく、多くの他人資本を必要とする。つまり借入比率を大きくし、投資資金のレバレッジ効果を最大限引き出し、さらに一般投資家からの資金も株式資本に組み込む。このとき2つの問題が生じる。

第1は多額の借入れによるデフォルト確率の増大である。第2は自己資本つまり株式資本を増加するために参加した一般投資家に成功報酬がは分配されるために創業者利潤の減少となる点である。しかも、一般投資家の資本参入により自己資本を増強したときでも、創業者が経営権を支配するためには一般投資家の自己資本出資比率を50%以下に抑えなければならない。ところが、新規事業を実際にリスクを負って経営する創業者が一般投資家とまったく同じ利益分配であるならば、新規事業に対する起業意欲はそがれるであろう。

第1の問題に対処する方法の1つが、たとえば返済スケジュールの2重化である。この2重化返済スケジュールに関してはUratani[5]を参照されたい。第2の問題に対する解決の方法が本論で分析する創業者に対する割り増し利益率の政策である。

本論では、創業者とは企業のいわゆるオーナー経営者にあたり、経営者としてのリスク管理と収益の達成努力に対するものとする。彼らのリスク管理に対する報酬をいかに資本構成に組み込むかの問題を考察する。

2 キャッシュフローモデル

ある生産施設が A 円であり、その生み出すネットキャッシュフローのプロセスが

$$dR(t) = \mu dt + \sigma dw(t), \quad R(0) = 0,$$

であると仮定する。ただし、 $w(t)$ は標準ブラウン運動であり、そのパラメータ μ, σ は定数であるとする。

プロジェクト企業の株式資本が M 円あり、他人資本(借入資本)が A 円あるとする。キャッシュフローを生む生産設備はすべて借り入れた他人資本で設置するとし、ネットキャッシュフローは財

務支払い以外の費用を差し引いたものである。財務支払いはデット・サービスであり、借り入れローンの元金返済と金利支払いの和である。連続的で一定なデットサービス額を C 円とする。ネットキャッシュフローからデットサービスを引いたものがフリーキャッシュフローであり、

$$dV(t) = dR(t) - C$$

と記す。この累積額である $V(t)$ は企業が保有するフリーキャッシュ額である。 $V(t)$ は時刻 t における資本家に帰属し、

$$V(t) = M + R(t) - \int_0^t C ds, \quad V(0) = M. \quad (1)$$

となる。初期フリーキャッシュ額を株式資本と仮定すると、 $V(0) = A$ である。フリーキャッシュ額がデットサービス以下となると、つまり $V(t) < 0$ であるとき、この企業は、返済不能、いわゆるデフォルトとなる。¹

創業者は資本金に対する特別な条件が付帯する株式としての出資比率を g であるとする。さらに、創業者は一般投資家として $0.5 - g$ 出資し株式出資比率を 50 % の確保する。株式の残りの 50 % は一般投資家が出資する。

創業者利潤を確保するために次の戦略を考えてみよう。フリーキャッシュ額の増分が出資額に達すると創業者の株式持分比率が g から h に増加する。たとえば Finnerty[4] のコジェネレーションプロジェクトでは、創業者の初期持分 10% から 50% に増加する戦略である。持分変更後は創業者株と一般投資家株の持分比率は等しくなる。

創業者への持分比率を変更する時刻を T_g とすると、

$$T_g = \inf\{t > 0 : V(t) - M = M\}$$

と定義され、鏡像原理と測度変換を用いると、 T_g の確率分布関数が

$$\begin{aligned} P(T_g < t) &= 2P^*(\sigma w(t)^* > M) \\ &= \int_0^t \frac{M}{\sqrt{2\pi\sigma^2 s^3}} \exp\left\{-\frac{(M + (C_a - \mu)s)^2}{2\sigma^2 s}\right\} ds \end{aligned} \quad (2)$$

と求められる。

2.1 元利金等返済とデフォルト確率

借入金利を一定で r であるとする。借入金を A としたときの元利金等返済額 C は

$$A = \int_0^{T_a} e^{-rs} C ds \quad (3)$$

であるから、

$$C = \frac{Ar}{1 - \exp\{-rT_b\}}.$$

となる。返済額は貸し出し期間に依存して、 $T_a = \infty$ のときの最小値から $T_a = 0$ のときの上界値までとる。

$$Ar \leq C < A.$$

¹厳密には $V(t) < C$ であるが、係数の単純化のために 0 とした。

フリーキャッシュ額が初めて0以下となる時間を T_D とすると、

$$T_{D_1} = \inf\{t > 0 : V(t) = 0\}$$

であり、金利も元金返済もできないので、この時刻をデフォルト時刻とすると、その確率分布は、(2)と同様に、

$$\begin{aligned} P(T_{D_1} < t) &= 2P^*(\sigma w(t) < -M) \\ &= \int_0^t \frac{M}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left\{-\frac{(-M + (C - \mu)t)^2}{2\sigma^2 t}\right\} dt \end{aligned}$$

となる。

2.2 デフォルトリスク

ローンを貸し出す銀行にとって、完済時刻 T_a までのデフォルトの確率は

$$P(T_{D_1} < T_a) = \int_0^{T_a} \frac{M}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left\{-\frac{(-M + (C - \mu)t)^2}{2\sigma^2 t}\right\} dt$$

である。銀行がデフォルト確率として許容できるレベルを α とするなら、

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^{T_a} \frac{M}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left\{-\frac{(-M + (C - \mu)t)^2}{2\sigma^2 t}\right\} dt \\ &= \Phi\left(\frac{-M - (\mu - C_\alpha)T_\alpha}{\sigma\sqrt{T_\alpha}}\right) \\ &\quad + \exp\left(\frac{2(C - \mu)M}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{-M + (\mu - C_\alpha)T_\alpha}{\sigma\sqrt{T_\alpha}}\right), \end{aligned} \quad (4)$$

を満たす貸し出し期間 T_a 、したがって元利返済額 C_α を銀行は決めることになる。ただし、 Φ は標準正規分布の分布関数とする。

3 創業者と一般株式投資家

株式投資にたいしてはキャッシュ配当はなく、利益の分配は企業価値の持分によって評価する。

フリーキャッシュ残高の所有権は株主に帰属し、ローン返済中と返済後はそれぞれ

$$V(t) = \begin{cases} M + R(t) - Ct & t \leq T_a \\ M - CT_a + R(t) & t > T_a \end{cases}$$

となる。

時点 t における株式の価値を $S(t)$ とすると、デフォルトがないときには現在のフリーキャッシュ額とその将来の値の現在価値であるから

$$S(t) = V(t) + \int_t^\infty e^{-rs} dV(s)$$

3.1 自己資本調達株式の株式収益率

ローンがない時には、初期の株式価値とその期待値は

$$\begin{aligned} S(0) &= M + \int_0^\infty e^{-rs} dV(s) \\ E[S(0)] &= M + \frac{\mu}{r} \end{aligned}$$

となる。一方、借入金が A があるときは、それぞれ

$$\begin{aligned} S^L(0) &= M + \int_0^{T_a} e^{-rs} (\mu - C) ds + \int_{T_a}^\infty e^{-rs} \mu ds + \int_0^\infty e^{-rs} \sigma dw(s) \\ E[S^L(0)] &= M + \frac{\mu}{r} - C \frac{1 - e^{-rT_a}}{r} = M + \frac{\mu}{r} - A \end{aligned} \quad (5)$$

となる。いずれの場合も、初期株式価値の分散は等しく

$$\text{Var}[S(0)] = \text{Var}[S^L(0)] = \int_0^\infty e^{-2rs} \sigma^2 ds = \frac{\sigma^2}{2r}$$

となる。したがって、デフォルトがないときは株式のシステムティック・リスクは等しい。ゆえに期待収益率のだけで2つのケースの比較が可能となる。ローンがない自己資本調達の株式期待収益率は

$$\frac{E[S(0)]}{M+A} - 1 = \frac{\frac{\mu}{r} - A}{M+A} = \frac{\frac{\mu}{r} - A}{M} \frac{1}{1+b} \quad (6)$$

ローンが A あるときの株式収益率は

$$\frac{E[S^L(0)]}{M} - 1 = \frac{\frac{\mu}{r} - A}{M} \quad (7)$$

となる。ただし、債務株式比率を $b = A/M$ とする。ローンによるレベレッジにより収益率は $1+b$ 倍になる。この収益の増分は、創業者が一般投資家より多くの配分をデフォルトリスクを回避することに対する報酬として受け取る部分である。

3.2 ローンがない企業の創業者利潤

ローンがない場合には株主の出資額 $A + M$ であり、キャッシュ残高 $V(t)$ は

$$dV(t) = \mu dt + \sigma dw(t), \quad V(0) = M$$

となり、デットサービス C がない。このときの創業者の株式持分比率の変更時刻とその確率分布は

$$\begin{aligned} T_g &= \inf\{t > 0 : V(t) = M + A\} \\ P[T_g < t] &= 2P^*[\sigma w^*(t) > A] \\ &= \int_0^t \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma^2 s^3}} \exp\left\{-\frac{(A - \mu s)^2}{2\sigma^2 s}\right\} ds \end{aligned} \quad (8)$$

となりである。創業者と一般株主の時刻 t における株式持分をそれぞれ $G(t), L(t)$ とする。株式持分変更がないときには、時刻 0 における創業者の配分は $G(0) = gS(0)$ であり、一般株主の配分は $L(0) = (1 - g)S(0)$ である。

持分変更が時刻 T_g で実施されたときの創業者の価値の増分は

$$\Delta(T_g) = (h - g) \int_{T_g}^{\infty} e^{-r(t-T_g)} dV(t)$$

したがって、創業者の現在価値は

$$G(0) = gS(0) + e^{-rT_g} \Delta(T_g)$$

となる。一方、このときの一般株主の価値は、

$$L(0) = (1 - g)S(0) - e^{-rT_g} \Delta(T_g) = (1 - h)S(0) + (h - g) \int_0^{T_g} e^{-rt} dV(t)$$

であり、その期待値は

$$E[L(0)] = (1 - h)M + (1 - g)\frac{\mu}{r} - (h - g)E[e^{-rT_g}]$$

であり、右辺第3項は (8) から

$$E[e^{-rT_g}] = \exp\left\{-\frac{A}{\sigma^2}(\sqrt{\mu^2 + 2r\sigma^2} - \mu)\right\} \quad (9)$$

と計算される。

ローンが存在しない場合には一般株主の利益を創業者に移転するだけの株式持分の変更になるので、変更後の一般株主の期待収益率は、変更前の収益率である (6) を上回ることはない。従って、ローンがない場合には一般投資家がこの株式を購入することはない。ゆえに創業者は配分変更政策を実施できない。

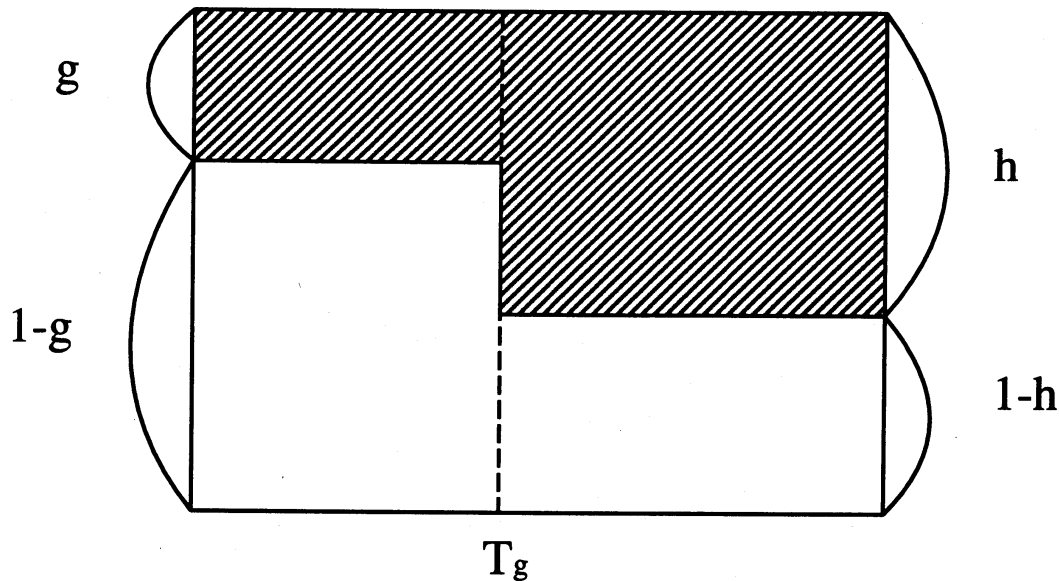


図1 創業者と一般株主の配分変化

3.3 ローンがあるときの創業者利潤と一般株主

ローンがあるとき、つまり Leverage が存在する場合を考えよう。株主の出資額を M とし、借入額を A とする。フリーキャッシュ残高 $V(t)$ は、インジケータ関数 I を用いて、

$$dV(t) = (\mu - I_{\{t > T_a\}}C)dt + \sigma dw(t), \quad V(0) = M$$

とあらわせる。持分比率の変更の時刻とその確率分布はそれぞれ

$$T_g = \inf\{t > 0 : V(t) - M = M\}$$

$$P[T_g < t] = 2P^*[\sigma w^*(t) > M] = \int_0^t \frac{M}{\sqrt{2\pi\sigma^2 s^3}} \exp\left\{-\frac{(M - (\mu - C)s)^2}{2\sigma^2 s}\right\} ds$$

である。株主全体の収益率はレバレッジがあるので、100 % 株主資本より $1+b$ 倍大きくなり、(7) から $\frac{\mu/r - A}{M}$ である。一般株主の期待収益率は図 1 から

$$E[L(0)] = (1-h)E[S^L(0)] + (h-g)E\left[\int_0^{T_g} e^{-rt} dV(t)\right]$$

である。第 2 項は、(i) ローン完済前に持分率変更がある $T_g < T_a$ のときと (ii) ローン完済後に持分率変更があるときとの 2 つの状態に対しての全確率の公式から、

$$E\left[\int_0^{T_g} e^{-rt} dV(t)\right] = \frac{1 - E[e^{-rT_g}]}{r} (\mu - C) P(T_g \geq T_a) + \left(\frac{1 - E[e^{-rT_g}]}{r}\right) (\mu - A) P(T_g > T_a) \quad (10)$$

となる。一般株主の期待配分は (5) から

$$E[L(0)] = (1-h)\left\{M + \frac{\mu}{r} - A\right\} + (h-g)E\left[\int_0^{T_g} e^{-rt} dV(t)\right] \quad (11)$$

であり、一般株主の期待収益率は 100 % 株主資本のケース収益率以上でなければならない。

$$E[L(0)/(1-g)M] \geq \frac{\mu/r - A}{M + A}$$

これに (11) を代入すると、

$$(1-h)E[S^L(0)] + hE\left[\int_0^{T_g} e^{-rt} dV(t)\right] \geq g\left(E\left[\int_0^{T_g} e^{-rt} dV(t)\right] - \frac{E(S^L(0)) - M}{1+b}\right) \quad (12)$$

となり、 $E\left[\int_0^{T_g} e^{-rt} dV(t)\right] - \frac{E(S^L(0)) - M}{1+b}$ は (11) から明らかに負であるので、 g の最小値 g_{min} は

$$g_{min} = \frac{(1-h)E[S^L(0)] + hE\left[\int_0^{T_g} e^{-rt} dV(t)\right]}{\frac{E(S^L(0)) - M}{1+b} - E\left[\int_0^{T_g} e^{-rt} dV(t)\right]}$$

となる。創業者の期待収益率は同様に、

$$E[G(0)] = hE[S^L(0)] - (h-g)E\left[\int_0^{T_g} e^{-rt} dV(t)\right]$$

であるから、創業者の期待収益率は

$$E[G(0)/gM] = \frac{h}{g}\left(1 + \frac{\mu/r - A}{M}\right) + \left(1 - \frac{h}{g}\right)\frac{E\left[\int_0^{T_g} e^{-rt} dV(t)\right]}{M}$$

である。創業者の期待収益は g に関して減少関数なのでその最大値は g_{min} のときである。

創業者が一般株主として合算で 50% の所有権を保有し、創業者の特権がついた株式の成功時の株式保有比率 $h = 0.5$ とするときには、両者の平均としての期待収益率を最大化することになり、

$$E\left(\frac{G(0) + L(0)(0.5 - g_{min})}{0.5M}\right)$$

g_{min} が創業者の収益率を最大にする創業者の特権がついた株式の初期保有比率である。

4 数値計算

ここでは、これまでの理論を用いて数値計算を行った。株式資本を変化させ、創業者の初期保有比率と期待収益率の関係を計算した。パラメータは金利 $r=0.1$, 借入金 $A=50$, 保有比率変更時刻 $T_g=20$, 変更後保有比率 $h=0.5$, $\mu=10$, $\sigma=1$, と設定した。計算より、債務比率 b が大きくなると、創業者は高い収益を見込め、また、初期保有比率 g も下げることにしても高い収益を望めるということが確認できた。

表1 創業者の保有比率と期待収益率

株式資本	債務比率	初期保有比率	期待収益率
25	2	0.455	2.2
20	2.5	0.251	5.6
16	3.125	0.04	45.9

5 終わりに

本論で解析した創業者利潤分配のための資本構造は、キャッシュフローの変動が少なく、確実な将来収入が期待できるビジネスである。これがプロジェクトファイナンス可能な事業なのである。したがって、借入が可能になり、それに伴うレバレッジ効果を創業者は一般株主より大きな収益率を成功報酬として獲得可能なのである。

一般的にベンチャー企業は、プロジェクトファイナンスになりえない不確実なキャッシュフローであることが多い。しかも、このときにも創業者の成功報酬を確保しなければ、ベンチャー企業の起業は限られたものになる。この場合には、創業者と一般投資家は同一比率の普通株を持ち、さらに不足する部分を優先株として発行し、一般投資家に販売する。成功の暁には、一般投資家が保有する優先株は普通株に転換可能とする。一方、創業者には一般投資家が保有することになる株数と同数になるようにストックオプションを創業者が保有する普通株に付帯するものとする。この仕組みでは株式保有者間の利益配分はゼロサムゲームであるから、100%自己資金で起業する起業に投資する場合よりも一般投資家の収益率は低い。以上ようなベンチャーキャピタルの分析は本論と同様な方法で可能になる。

参考文献

- [1] Cox,D.R. and Miller,H.D. "The Theory of Stochastic Processes," Chapman and Hall, 1965
- [2] Emery,G. and Cogger " Measurement of Liquidity" Journal of Accounting Research,20(2),pp290-303,1982
- [3] Feller,W "An Introduction to Probability theory and its applications",John Wily 1957
- [4] John.D.Finnerty," Project Financing:Asset-Based Financial Engineering," John Wiley, 1996
- [5] Uratani,T. and Utsunomiya,M. "Default risk in Project Financing for dual scheduled amortization" 日本金融・証券計量・工学会 2001 年冬季大会 pp. 1-13 2001 年 12 月 14 日 学習院